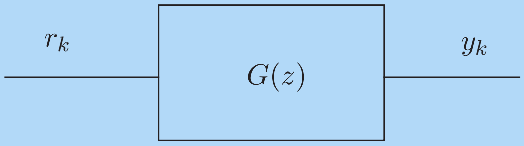
Resposta Frequencial de Temps Discret

Teoria

Els mètodes d'anàlisi de sistemes dinàmics lineals es classifiquen en temporals i freqüencials. L'anàlisi freqüèncial es basa en el fet que, en règim permanent, la resposta d'un sistema lineal a una excitació senoidal també és senoidal, i de la mateixa freqüència que l'excitació.



Més concretament, si $G(z) = \frac{Y(z)}{R(z)}$ és la funció de transferència d'un sistema de temps discret i l'excitem mitjançant el senyal $r_k = \sin(k\omega),\ k \in \mathbb{N}$, aleshores $y_k = A\sin(k\omega + \varphi)$. A més es verifica

$$G(e^{j\omega}) = A \cdot e^{j\varphi} \qquad A,\, \varphi \in \mathbb{R}$$

En particular si el sistema de temps discret prové de mostrejar un sistema de temps continu amb període de mostratge T_s, aleshores les expressions anteriors es reescriuen com:

$$y_k = \sin(k\,T_s\,\omega),\ k \in \mathbb{N} \tag{1}$$

$$u_k = A\sin(k\,T_s\,\omega + \varphi) \tag{2}$$

$$G(e^{j\,\omega\,T_s}) = A \cdot e^{j\,\varphi} \tag{3}$$

La funció $G(e^{j\omega})$ (respectivament $G(e^{j\omega T_s})$) descriu la resposta en règim permanent del sistema $G(z)$ a l'excitació $\sin(k\omega)$ (respectivament $\sin(k\,T_s\,\omega)$). Naturalment al parlar de la resposta en règim permanent s'està suposant que $G(z)$ és estable; tanmateix, els resultats d'aquesta fitxa sobre la funció $G(e^{j\omega})$ (respectivament $G(e^{j\omega T_s})$) són vàlids independentment del caràcter estable/inestable de $G(z)$.

Observacions

1. $G(e^{j\omega})$ és periòdica de període 2π (respectivament $G(e^{j\omega\,T_s})$ és periòdica de període $\frac{2\pi}{T_s}$).
2. $G(e^{-j\omega}) = \overline{G(e^{j\omega})}$.
3. $G(e^{j\cdot 0}) \in \mathbb{R}$.
4. $G(e^{j\pi}) \in \mathbb{R}$ (respectivament $G(e^{j\,\omega\,T_s}) \in \mathbb{R}$ per a $\omega = \frac{\pi}{T_s}$).

De les observacions anteriors en resulta que per a conèixer $G(e^{j\omega})$, és suficient considerar $\omega \in [0, \pi]$ (respectivament $\omega \in [0, \frac{\pi}{T_s}]$ per a $G(e^{j\omega T_s})$).

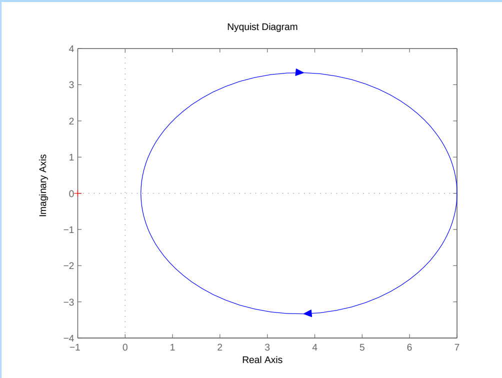
De la corba $G(e^{j\omega})$ (respectivament $G(e^{j\omega T_s})$) obtinguda al variar $\omega \in [-\pi, \pi]$ (respectivament $\omega \in [-\frac{\pi}{T_s}, \frac{\pi}{T_s}]$) se'n diu corba o diagrama de Nyquist.

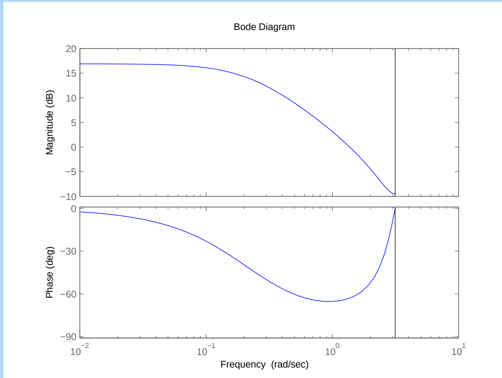
Una altra representació gràfica característica de la funció $G(e^{j\omega})$ (respectivament $G(e^{j\omega T_s})$) és la representació en coordenades polars mitjançant els diagrames de Bode. Recordem que la corba de guanys és la gràfica de $(\log_{10}\omega, 20\log_{10}|G(e^{j\omega})|)$ al variar $\omega \in [0, \pi]$ (respectivament $(\log_{10}\omega, 20\log_{10}|G(e^{j\omega T_s})|)$ al variar $\omega \in [0, \frac{\pi}{T_s}]$). La corba de fases és la gràfica de $(\log_{10}\omega, arg(G(e^{j\omega})))$, on l'argument es dóna en graus (respectivament $(\log_{10}\omega, arg(G(e^{j\omega T_s})))$).

Cont ...

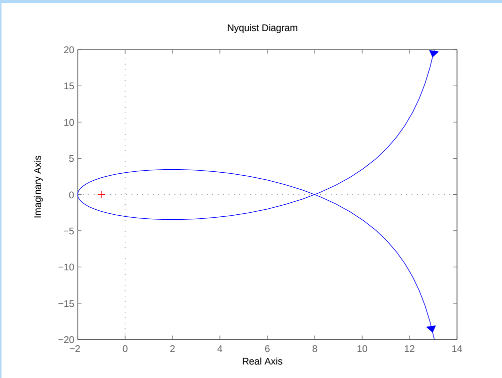
Exemples

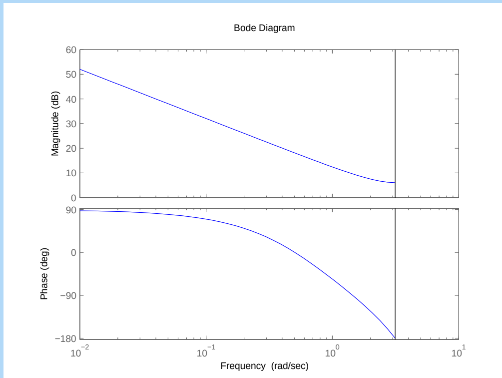
- $G(z) = \frac{5z+2}{5z-4}$





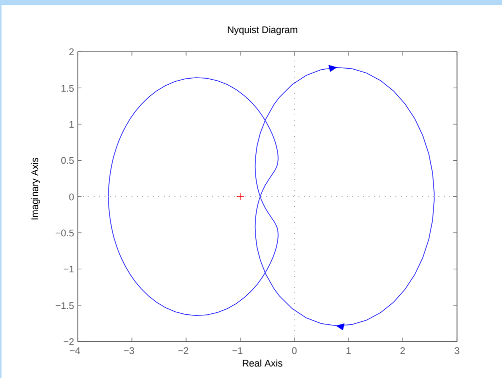
- $G(z) = \frac{2(z-2)}{(z-1)(z-0.5)}$

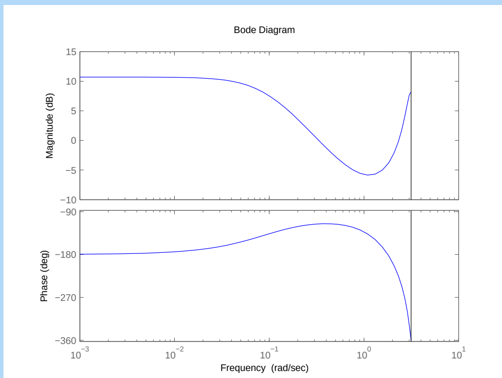




L'asímptota vertical de la corba de Nyquist prové del pol de $G(z)$ a $z = 1$.

- $G(z) = \frac{z-0.3}{(z+0.2)(z+0.7)(z-1.1)}$





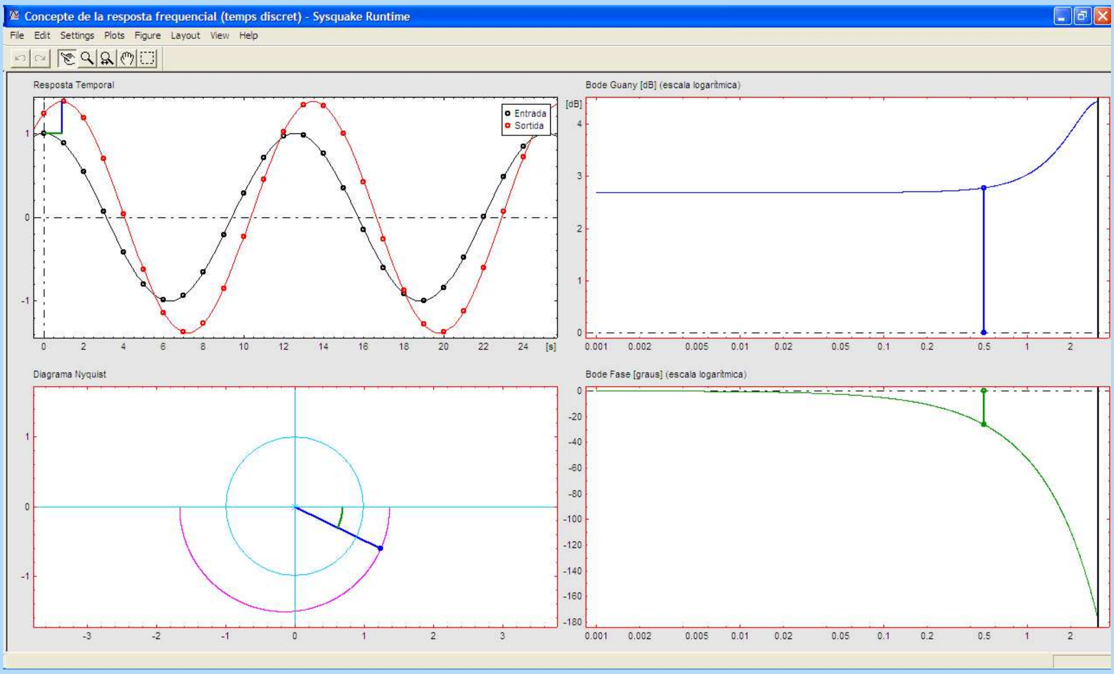
Les corbes s'han obtingut al variar la freqüència entre $-\pi$ i π (respectivament $-\pi/T_s$ i π/T_s). Als exercicis només dibuixarem mitja corba de Nyquist, variarem la freqüència entre 0 i π (respectivament 0 i π/T_s).

Referències

- B. Kuo. **Digital Control Systems**. Oxford. 2nd Edition. ISBN: 0195120647. [Capítol: 3, Pàgines: –-—]
- John G. Proakis & Dimitris G. Manolakis. **Digital Signal Processing. Principles, Algorithms and Applications**. Macmillan Publishing Company. Second Edition. ISBN: 0-02-396815-X. [Capítol: 2, Pàgines: —-–—]

Aplicació

Enllaç directe amb la fitxa Sysquake: Concepte_frequencial_TD.exe



Aplicació: Opcions

Exercicis